La ruta hacia la complejidad

La complejidad dinámica no sólo se observa en procesos en los que interactúan muchas variables. Sistemas con un reducido número de ellas presentan comportamientos cuya evolución no es posible predecir y en cuya aparente aleatoriedad la matemática ha encontrado cierto orden. Se trata, por ejemplo, de los atractores extraños, que fundamentan el concepto de caos.

José Angel Rodíguez 10/5/2010 10:45 CEST

Henri Poincaré. Imagen: Wikipedia.

Todos somos conscientes de la complejidad del mundo que nos rodea. Fenómenos que evolucionan con un marcado orden se muestran de repente desordenados o imprevisibles: el pulso del corazón se altera con episodios de arritmia, el clima es tozudamente impredecible. Otras veces, procesos independientes se sincronizan, actividades erráticas y de gran riqueza como la propia del cerebro se torna periódica o monotemática.

Cuando uno de estos cambios cualitativos se observa en un proceso, los matemáticos dicen que se ha producido una bifurcación o transición. Es evidente la preocupación permanente de la ciencia por estas transiciones. La enfermedad es una bifurcación entre dos dinámicas fisiológicas bien diferenciadas, las crisis o revoluciones son secuencias de transiciones más o menos caóticas de una situación social a otra distinta. Ningún proceso permanece inalterable, ni tan siquiera el movimiento secular de nuestra galaxia.

Acorde con la inquietud por tales asuntos celestes, el rey Oscar II de Suecia concedió un premio a H. Poincaré por su trabajo encaminado a probar la estabilidad del sistema solar. Una vez recibido el premio y publicado su trabajo el propio autor descubrió una laguna en su demostración. No había considerado en su modelo una configuración geométrica que implicaba una tremenda maraña. Con el dinero del premio recogió todos los números de la revista (queda un ejemplar en la Academia Sueca) dando así una lección de honestidad al tiempo que dejaba planteado uno de los grandes problemas del futuro.

La muerte de Poincaré

Durante estos años muchos matemáticos han tratado de comprender el misterio que las ecuaciones diferenciales esconden bajo aquella maraña.Primero lentamente luego con mayor éxito, se fue comprendiendo lo que se daba en llamar caos o turbulencia. Un impulso espectacular se debió al programa creado por S. Smale, (medalla Field en 1966). Un discípulo suyo, J. Palis, desarrolló notablemente este programa a golpe de certeras conjeturas.

Finalmente, casi un siglo después del trabajo de Poincaré, en 1993, dos alumnos de Palis, L. Mora y M. Viana, probaron que en la configuración de Poincaré existían conjuntos hacia los que convergía la dinámica, pero que en su interior los errores se multiplicaban exponencialmente, de ahí la imposibilidad de predecir su evolución. Estos conjuntos se denominaron atractores extraños y son hoy el riguroso sinónimo del caos.

El concepto de atractor extraño pululaba por la literatura para explicar ciertas observaciones numéricas. Popular es el conjunto detectado por E. Lorenz en su simplificado modelo de convección atmosférica y el aún más simplificado propuesto por M Hénon. Sin embargo, nadie había probado que estos conjuntos eran atractores extraños ni tan siquiera que este tipo de atractores, que aparecían y desaparecían a la menor perturbación, podían existir.

La primera prueba fue dada para el modelo de Hénon por M. Benedicks y su maestro L. Carleson, anciano matemático galardonado en 2006 con el premio Abel (concedido por la Academia noruega, en paralelo con los premios Nóbel). Sus complicados argumentos, publicados en 1991, fueron fundamentales para Mora y Viana. El contacto con Palis y algunos de sus discípulos, especialmente con Viana, fue crucial para que nuestro grupo afrontara problemas de esta envergadura.

En 1994, A. Pumariño probó en su tesis doctoral la existencia simultánea de cualquier número de atractores extraños para campos tridimensionales, extendiendo la validez de los métodos de Benedicks y Carleson más allá de las funciones cuadráticas que ellos manejaban. Este resultado aún constituye hoy la mejor aproximación a una de las conjeturas propuestas por Palis y no resuelta: la existencia de infinitos atractores simultáneos es una situación excepcional.

La naturaleza de la complejidad se va desentrañando, pero todavía sigue fascinando cómo emerge en el mundo animado. El grupo se mantiene muy interesado en explicar cómo dinámicas sencillas se acoplan para generar dinámicas caóticas. Recientemente se han obtenido interesantes resultados en esta línea acoplando por difusión lineal modelos de reacciones químicas bien conocidos. Para ello se han desarrollado las ideas pioneras de la tesis que S. Ibáñez leía también aquel día de 1994.

Estas ideas se plantean desde la convicción de que toda dinámica se puede encontrar en un entorno infinitesimal de una adecuada singularidad del campo. Hallar para cada comportamiento la singularidad menos degenerada que lo despliega es algo así como encontrar la semilla que al germinar genera el frondoso árbol. Esta propuesta filosófica y la estrategia de trabajo son prometedoras y como tal han abierto un reciente intercambio con la Universidad de Houston a la que se incorpora para una estancia larga la investigadora más joven del grupo, F. Drubi.

Al estudio de los campos polinomiales en el plano el grupo ha aportado también publicaciones relevantes, algunas de ellas relacionadas con el problema 16 de Hilbert. Recientemente, se ha resuelto un viejo problema traído desde Darboux por Poincaré: la caracterización de los campos polinomiales cuadráticos que tienen integral primera polinomial. Este resultado obtuvo el primer premio para las exposiciones en su campo durante el Congreso Internacional celebrado en Madrid el pasado año 2006 y constituye una parte importante de la tesis que B. García realizó bajo la dirección de J. S. Pérez del Río.

TAGS MATEMÁTICAS-COMPLEJIDAD